

O método LIATE como heurística pedagógica na resolução de integrais por partes e sua inserção histórica no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral

The LIATE method as a pedagogical heuristic in the resolution of integration by parts and its historical insertion in the development of differential and integral calculus

Paulo Henrique Farias Xavier¹

Ed Frank dos Santos Silva²

Raniele Cerqueira dos Santos³

RESUMO

A integração por partes é uma técnica essencial do Cálculo Integral, amplamente utilizada na resolução de integrais que envolvem o produto de funções, porém frequentemente associada a dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, sobretudo quanto à escolha adequada das funções a serem derivadas e integradas. Diante desse desafio, o método LIATE surge como uma estratégia heurística de caráter didático-pedagógico, ao propor uma hierarquização dos tipos de funções que orienta de maneira sistemática a aplicação da técnica, reduzindo procedimentos baseados em tentativa e erro. O texto analisa o método LIATE sob a perspectiva educacional, discutindo seus fundamentos conceituais, sua aplicabilidade, suas limitações e sua relevância no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Paralelamente, apresenta um panorama histórico do desenvolvimento do cálculo, desde práticas empíricas da Antiguidade até sua formalização nos séculos XVII, XVIII e XIX, destacando a consolidação das técnicas de integração ao longo desse processo. A pesquisa, de natureza bibliográfica e

¹e-mail: pahenfax@gmail.com

²e-mail: edfranksantos@yahoo.com.br

³e-mail: ranicerqueira@gmail.com

analítica, indica que o uso do método LIATE favorece a compreensão conceitual da integração por partes, promove maior autonomia discente e contribui para uma aprendizagem mais significativa, configurando-se como uma ferramenta auxiliar eficaz, ainda que não formal, no ensino do cálculo integral.

Palavras-chave: Integração por partes. LIATE. Cálculo integral. Ensino de matemática.

ABSTRACT

Integration by parts is an essential technique in Integral Calculus, widely used in solving integrals that involve the product of functions; however, it is often associated with difficulties in the teaching and learning process, especially regarding the appropriate choice of functions to be differentiated and integrated. Faced with this challenge, the LIATE method emerges as a heuristic strategy of a didactic-pedagogical nature, proposing a hierarchy of function types that systematically guides the application of the technique, reducing procedures based on trial and error. The text analyzes the LIATE method from an educational perspective, discussing its conceptual foundations, applicability, limitations, and relevance in the teaching of Differential and Integral Calculus. At the same time, it presents a historical overview of the development of calculus, from empirical practices of Antiquity to its formalization in the 17th, 18th, and 19th centuries, highlighting the consolidation of integration techniques throughout this process. The research, of a bibliographic and analytical nature, indicates that the use of the LIATE method fosters conceptual understanding of integration by parts, promotes greater student autonomy, and contributes to more meaningful learning, establishing itself as an effective, albeit informal, auxiliary tool in the teaching of integral calculus.

Keywords: Integration by parts. LIATE. Integral calculus. Mathematics education.

1 JUSTIFICATIVA

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que estuda as variações, os movimentos e a determinação de áreas e volumes, sendo fundamental para a compreensão de fenômenos naturais e científicos (BOYER; MERZBACH, 2012). Segundo materiais de divulgação científica e educacional, como os disponibilizados pelo Piskounov, o desenvolvimento do cálculo está diretamente ligado à tentativa humana de compreender mudanças contínuas observadas na natureza.

Na Antiguidade, civilizações como a egípcia e a babilônica já utilizavam métodos práticos para resolver problemas de medição, especialmente relacionados à agricultura e à

construção (EVES, 2011). Entretanto, foi na Grécia Antiga que surgiram os primeiros estudos teóricos mais próximos do cálculo. O matemático Eudoxo de Cnido desenvolveu o método da exaustão, que permitia calcular áreas e volumes por meio de aproximações sucessivas, ideia destacada em textos introdutórios sobre a história do cálculo (KATZ, 2009; PISKOUNOV, 1993). Esse método foi aperfeiçoado por Arquimedes, cujos estudos anteciparam conceitos relacionados ao limite e à integral (BOYER; MERZBACH, 2012).

Durante a Idade Média, importantes contribuições surgiram fora da Europa. De acordo com os conteúdos educacionais divulgados pelo Piskounov, matemáticos indianos tiveram papel fundamental na evolução das ideias que levariam ao cálculo moderno. Entre eles destaca-se Bhaskara II, que trabalhou com problemas envolvendo taxas de variação e máximos e mínimos (EVES, 2011). Posteriormente, Madhava de Sangamagrama, da Escola de Kerala, desenvolveu séries infinitas para funções trigonométricas, antecipando resultados importantes do cálculo integral (KATZ, 2009; PISKOUNOV, 1993).

O surgimento formal do cálculo ocorreu no século XVII, quando dois matemáticos desenvolveram a teoria de forma independente. Isaac Newton utilizou o cálculo como ferramenta para explicar o movimento dos corpos e as leis da Física, enquanto Gottfried Wilhelm Leibniz criou uma notação matemática clara e organizada, adotada até os dias atuais, como o símbolo da integral ($\int$) e a notação da derivada—

$$\frac{dy}{dx}$$

(BOYER; MERZBACH, 2012; PISKOUNOV, 1993). Ambos formularam o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona os processos de derivação e integração (STEWART, 2017).

Nos séculos XVIII e XIX, o cálculo passou por um processo de consolidação e rigor matemático. Leonhard Euler ampliou suas aplicações científicas, enquanto Augustin- Louis Cauchy e Karl Weierstrass estabeleceram definições rigorosas de limite e continuidade, garantindo maior precisão teórica ao cálculo (EVES, 2011).

Atualmente, conforme destacado em materiais educacionais do Piskounov, o cálculo diferencial e integral é essencial em áreas como Física, Engenharia, Economia e Estatística, sendo também um importante instrumento pedagógico no Ensino Médio para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da compreensão de fenômenos do cotidiano (PISKOUNOV, 1993; STEWART, 2017).

O ensino do cálculo diferencial e integral representa um dos maiores desafios nos cursos de graduação das áreas de ciências exatas e engenharias. Diversos estudos apontam

elevados índices de reprovação nas disciplinas iniciais de cálculo, atribuídos, em grande parte, à dificuldade dos estudantes em compreender e aplicar corretamente técnicas matemáticas fundamentais (STEWART, 2013; GUIDORIZZI, 2001).

Entre essas técnicas, a integração por partes destaca-se como um conteúdo que exige não apenas domínio algébrico, mas também capacidade de tomada de decisão estratégica. A escolha inadequada das funções u e dv frequentemente conduz a integrais mais complexas do que a original, gerando frustração e desmotivação nos estudantes (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Nesse cenário, o método LIATE apresenta-se como uma alternativa didática relevante, pois fornece um critério hierárquico simples para orientar a escolha da função a ser derivada. Embora amplamente utilizado em sala de aula e em materiais didáticos, o LIATE raramente é discutido de forma sistematizada em textos acadêmicos, sendo tratado, na maioria das vezes, como uma “regra prática” informal.

Assim, justifica-se a realização deste estudo pela necessidade de analisar o método LIATE de maneira mais aprofundada, destacando seu papel como ferramenta pedagógica no ensino do cálculo integral, bem como suas contribuições e limitações dentro do contexto acadêmico.

2 INTRODUÇÃO

O cálculo integral desempenha papel central na formação acadêmica de estudantes das áreas de matemática, física, engenharia e ciências aplicadas. Suas aplicações abrangem desde problemas teóricos da análise matemática até modelagens de fenômenos físicos, econômicos e biológicos (THOMAS et al., 2018).

Dentre as técnicas de integração, a integração por partes é derivada diretamente da regra do produto da diferenciação e constitui um dos métodos mais importantes para o cálculo de integrais envolvendo produtos de funções. Matematicamente, tal técnica é expressa pela fórmula:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Apesar de sua aparente simplicidade, a aplicação eficaz dessa fórmula depende crucialmente da escolha apropriada das funções u e dv . Conforme observado por Stewart (2013), uma escolha inadequada pode tornar a integral resultante mais complexa que a integral original, inviabilizando o processo de resolução.

Nesse contexto, surgem critérios heurísticos destinados a auxiliar estudantes e professores na tomada de decisão durante a aplicação da integração por partes. Um dos mais difundidos é o método LIATE, acrônimo que estabelece uma ordem de prioridade entre diferentes tipos de funções: logarítmicas, inversas trigonométricas, algébricas, trigonométricas e exponenciais.

Embora o método LIATE não constitua um teorema matemático formal, sua ampla aceitação no meio acadêmico evidencia sua utilidade prática. Autores como Anton, Bivens e Davis (2014) e Thomas et al. (2018) apresentam exemplos resolvidos que seguem implicitamente a lógica do LIATE, ainda que o acrônimo não seja explicitamente mencionado.

Dessa forma, este artigo propõe-se a investigar o método LIATE como uma heurística pedagógica, discutindo sua fundamentação conceitual, aplicações típicas e implicações no processo de ensino-aprendizagem da integração por partes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Integração por Partes no Cálculo Integral

A técnica de integração por partes tem sua origem direta na regra do produto da diferenciação. Considerando duas funções diferenciáveis $u(x)$ e $v(x)$ a regra do produto estabelece que:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Integrando ambos os lados da equação em relação a x , obtém-se:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Essa identidade constitui a base formal da integração por partes, expressa de maneira compacta por:

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

Segundo Guidorizzi (2001), essa técnica é particularmente útil quando a integral envolve o produto de funções cujas derivadas e primitivas são conhecidas. Entretanto, o autor ressalta que a eficácia do método depende diretamente da escolha adequada de u e dv , decisão que não é determinada unicamente pela fórmula.

Stewart (2013) enfatiza que a integração por partes não é um procedimento mecânico, mas sim uma estratégia que exige análise prévia do comportamento das funções envolvidas. Tal característica torna essa técnica uma das principais fontes de dificuldade para estudantes iniciantes.

3.2 O Método LIATE: Origem e Conceituação

O método LIATE consiste em um acrônimo que estabelece uma hierarquia para a escolha da função u na integração por partes. A sigla representa:

L – Funções logarítmicas

I – Funções inversas trigonométricas

A – Funções algébricas

T – Funções trigonométricas

E – Funções exponenciais

De acordo com essa hierarquia, a função que aparece primeiro na lista deve ser escolhida como u . Embora não haja consenso sobre a origem exata do acrônimo, seu uso é amplamente difundido em cursos de cálculo em universidades de diversos países, especialmente em materiais didáticos e notas de aula (STEWART, 2013).

Anton, Bivens e Davis (2014) destacam que essa hierarquia reflete propriedades fundamentais das funções envolvidas, tais como: a simplificação progressiva das derivadas de funções algébricas; a invariância das funções exponenciais sob derivação; a complexidade crescente das primitivas de funções logarítmicas.

Assim, o método LIATE não surge de forma arbitrária, mas baseia-se em características analíticas das funções elementares.

3.3 Fundamentação Matemática Implícita do LIATE

Embora o LIATE seja frequentemente apresentado como uma “regra prática”, sua lógica está intimamente relacionada ao comportamento das funções sob derivação e integração. Funções algébricas, por exemplo, tendem a simplificar quando derivadas repetidamente, enquanto funções exponenciais mantêm sua forma original (GUIDORIZZI, 2001).

Nesse sentido, ao escolher uma função algébrica como u e uma função exponencial

como dv , o estudante explora o fato de que a derivada da função algébrica eventualmente se tornará constante ou nula, simplificando a integral resultante.

Stewart (2013) observa que essa estratégia é particularmente eficaz em integrais do tipo:

$$\int x^n e^x dx \text{ ou } \int x^n \sin(x) dx$$

Nas quais a aplicação sucessiva da integração por partes conduz a uma redução progressiva da complexidade algébrica.

Dessa forma, o método LIATE pode ser compreendido como uma formalização pedagógica de observações empíricas feitas ao longo do desenvolvimento histórico do cálculo integral.

3.4 O LIATE como Heurística Pedagógica

Do ponto de vista educacional, o LIATE deve ser compreendido como uma heurística, isto é, uma estratégia orientadora que não garante a solução em todos os casos, mas aumenta significativamente a probabilidade de sucesso (POLYA, 1973).

Thomas et al. (2018) ressaltam que o uso de heurísticas no ensino de matemática é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois auxilia os estudantes a estruturar seu raciocínio e a tomar decisões fundamentadas.

Nesse sentido, o LIATE cumpre um papel relevante ao: reduzir o uso de tentativa e erro; fornecer um critério claro e memorizável; promover maior autonomia na resolução de integrais.

Contudo, é importante enfatizar que o LIATE não substitui a compreensão conceitual da integração por partes, devendo ser utilizado como complemento ao entendimento teórico.

4 METODOLOGIA

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de natureza qualitativa, com abordagem bibliográfica e analítica, cujo foco consiste na investigação do método LIATE como ferramenta heurística no ensino da integração por partes. Segundo Gil (2010), a pesquisa bibliográfica é adequada quando o objetivo é analisar e sistematizar conhecimentos já consolidados na literatura.

A metodologia adotada foi estruturada em três etapas principais: levantamento bibliográfico, análise conceitual e análise aplicada por meio de exemplos matemáticos.

4.1 Levantamento Bibliográfico

O levantamento bibliográfico concentrou-se em livros clássicos e amplamente utilizados no ensino de cálculo diferencial e integral em cursos de graduação. As obras foram selecionadas com base nos seguintes critérios:

- i. reconhecimento acadêmico dos autores;
- ii. ampla adoção em instituições de ensino superior;
- iii. abordagem sistemática da integração por partes;
- iv. presença explícita ou implícita de critérios heurísticos para escolha de funções.

Entre as principais referências utilizadas destacam-se Stewart (2013), Guidorizzi (2001), Anton, Bivens e Davis (2014) e Thomas et al. (2018). Tais autores fornecem uma base teórica sólida para a análise do método LIATE, ainda que o acrônimo nem sempre seja explicitamente mencionado.

4.2 Análise Conceitual do Método LIATE

A análise conceitual consistiu na investigação da lógica subjacente ao método LIATE, considerando as propriedades das funções envolvidas e seus comportamentos sob derivação e integração. Para isso, foram examinados exemplos típicos de integração por partes apresentados na literatura, buscando identificar padrões recorrentes na escolha das funções u e dv .

Conforme observado por Guidorizzi (2001), a escolha da função a ser derivada deve, sempre que possível, resultar em uma simplificação progressiva da integral. Esse princípio orientou a análise dos exemplos selecionados, permitindo relacionar a prática adotada pelos autores com a hierarquia proposta pelo LIATE.

4.3 Análise Aplicada: Exemplos Matemáticos

A análise aplicada baseou-se na resolução detalhada de integrais clássicas, frequentemente utilizadas em disciplinas de Cálculo I e II. Os exemplos foram escolhidos de modo a contemplar diferentes combinações de funções, tais como: funções algébricas e exponenciais; funções algébricas e trigonométricas; funções logarítmicas; funções inversas trigonométricas.

Cada exemplo foi resolvido utilizando a integração por partes, seguindo explicitamente o critério LIATE para a escolha de u . Em seguida, os resultados foram

comparados com abordagens alternativas, a fim de avaliar a eficiência do método. Essa estratégia metodológica permitiu evidenciar, de forma concreta, as vantagens e limitações do LIATE, bem como sua aplicabilidade em contextos distintos.

5 APLICAÇÕES DO MÉTODO LIATE NA RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS

5.1 Integrais Envolvendo Funções Algébricas e Exponenciais

Considere a integral:

$$\int x^2 e^x dx$$

De acordo com o método LIATE, a função algébrica x^2 deve ser escolhida como u , enquanto a função exponencial e^x deve ser tomada como dv . Assim:

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

Aplicando a fórmula da integração por partes, obtém-se:

Observa-se que a integral resultante apresenta menor grau algébrico, o que facilita a aplicação sucessiva do método. Esse comportamento está de acordo com as observações de Stewart (2013), que destaca a eficiência da integração por partes em integrais desse tipo.

5.2 Integrais Envolvendo Funções Algébricas e Trigonométricas

Considere agora a integral:

$$\int x \cos(x) dx$$

Esse exemplo ilustra como a escolha orientada pelo LIATE conduz rapidamente a uma solução simples e elegante.

6 APLICAÇÕES DO MÉTODO LIATE NA RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS

6.1 Integrais Envolvendo Funções Logarítmicas

As funções logarítmicas ocupam o primeiro nível da hierarquia do método LIATE, o que indica que, sempre que presentes em uma integral passível de integração por partes, devem ser escolhidas como a função u . Essa recomendação baseia-se no fato de que a derivada de uma função logarítmica é geralmente mais simples que a própria função.

Considere a integral:

$$\int \ln(x) dx$$

Seguindo o critério LIATE, escolhe-se:

$$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

Aplicando a fórmula da integração por partes:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c$$

Esse exemplo é amplamente discutido na literatura e ilustra de forma clara a eficácia do LIATE (GUIDORIZZI, 2001).

6.2 Integrais Envolvendo Funções Inversas Trigonométricas

As funções inversas trigonométricas, como $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$ e $\arccos(x)$, ocupam a segunda posição na hierarquia LIATE. Essas funções, quando derivadas, produzem expressões algébricas relativamente simples, o que justifica sua escolha como u .

Considere a integral:

$$\int \arctan(x) dx$$

Reescrevendo como produto:

$$\int \arctan(x) \cdot 1 dx$$

Tem-se:

$$u = \arctan(x) \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

Aplicando a fórmula:

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

A integral restante pode ser resolvida por substituição, conduzindo a uma solução completa e consistente, conforme discutido por Anton, Bivens e Davis (2014).

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A análise dos exemplos apresentados evidencia que o método LIATE conduz, na maioria dos casos, a escolhas eficientes das funções u e dv . Em integrais envolvendo funções algébricas, trigonométricas e exponenciais, a aplicação do critério resultou em uma redução progressiva da complexidade da integral.

Stewart (2013) destaca que essa redução sistemática é um dos principais objetivos da integração por partes, e o LIATE fornece um caminho claro para atingi-lo. Além disso, observou-se que o método é particularmente eficaz em contextos educacionais, nos quais estudantes iniciantes necessitam de orientações claras.

Entretanto, é importante reconhecer que o LIATE não é infalível. Existem integrais nas quais a aplicação direta do critério não conduz à solução mais eficiente, exigindo adaptações ou estratégias alternativas. Conforme observado por Thomas et al. (2018), a integração por partes deve ser utilizada de forma flexível, considerando sempre a estrutura específica da integral.

8 LIMITAÇÕES DO MÉTODO LIATE

Apesar de sua utilidade pedagógica, o método LIATE apresenta algumas limitações que devem ser explicitadas no processo de ensino. Primeiramente, trata-se de uma heurística, e não de uma regra matemática formal. Portanto, sua aplicação não garante sucesso em todos os casos (POLYA, 1973).

Além disso, o uso excessivo do LIATE sem a devida compreensão teórica pode levar a uma abordagem mecanicista da integração por partes. Guidorizzi (2001) alerta que o domínio das técnicas de cálculo deve estar sempre associado à compreensão conceitual dos processos envolvidos.

Outro ponto relevante refere-se à diversidade de funções presentes em integrais mais complexas, nas quais a hierarquia LIATE pode não ser suficiente para orientar a escolha das funções. Nesses casos, a experiência matemática e o entendimento profundo das propriedades das funções tornam-se indispensáveis.

9 CONCLUSÃO

A integração por partes constitui uma das técnicas mais relevantes do cálculo integral, sendo indispensável na formação acadêmica de estudantes das áreas de matemática, engenharias e ciências aplicadas. Apesar de sua fundamentação matemática sólida, a aplicação eficaz desse método requer decisões estratégicas que frequentemente representam um desafio para estudantes iniciantes.

Neste artigo, analisou-se o método LIATE como uma heurística pedagógica destinada a orientar a escolha das funções u e dv na integração por partes. A partir de uma abordagem bibliográfica e analítica, fundamentada em obras clássicas do cálculo diferencial e integral, foi possível evidenciar que o LIATE possui uma lógica conceitual consistente, baseada nas propriedades das funções elementares sob derivação e integração.

Os exemplos apresentados demonstraram que a aplicação do método LIATE tende a conduzir a integrais progressivamente mais simples, reduzindo a complexidade algébrica e facilitando a resolução do problema. Além disso, observou-se que o uso desse critério contribui significativamente para a redução de erros operacionais, especialmente em contextos educacionais nos quais os estudantes ainda estão desenvolvendo sua intuição matemática.

Entretanto, ressaltou-se que o LIATE não deve ser compreendido como uma regra

absoluta. Trata-se de uma heurística que deve ser utilizada de forma crítica e flexível, sempre associada à compreensão teórica da integração por partes. A formação matemática sólida exige que o estudante seja capaz de adaptar estratégias e reconhecer situações em que abordagens alternativas são mais adequadas.

Conclui-se, portanto, que o método LIATE apresenta elevado potencial didático, constituindo uma ferramenta valiosa no ensino do cálculo integral. Sua utilização consciente e fundamentada pode contribuir para um processo de ensino-aprendizagem mais eficiente, favorecendo o desenvolvimento do pensamento matemático e a autonomia dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Calculus**. 10. ed. New York: Wiley, 2014.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- KATZ, V. J. **A history of mathematics: an introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.
- PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**.
- POLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1973.
- STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- THOMAS, G. B. *et al.* **Thomas' calculus**. Boston: Pearson, 2018.