

Sistema de exercícios didáticos sobre a análise trigonométrica a partir das considerações teóricas do conceito: identidades trigonométricas no ensino médio geral em Angola

System of didactic exercises on trigonometric analysis based on theoretical considerations of the concept: trigonometric identities in general secondary education in Angola

Filipe Savilolo Exejelina Zaqueu¹

Sabino Tomás Neto da Silva²

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação que foi desenvolvida em conjunto com os alunos. Objectivos, métodos empregados desde o ponto de vista teórico e prático. Na investigação se utilizaram métodos teóricos empíricos e a actualidade consiste em problemas com maiores dificuldades quanto ao conhecimento da trigonometria no ensino médio geral especificamente na 11ª classe do Liceu do Sumbe. O embasamento metodológico que conjecturou nossa pesquisa contempla primordialmente a análise dos dados para consolidar a informação que indique como foi efectivada a abordagem dos assuntos das identidades trigonométricas. A angariação dos subsídios ocorreu através de um estudo de campo por meio de um questionário que, por sua vez, é focado na caracterização das percepções do âmbito escolar e da instituição de ensino médio geral, sobressaindo primordialmente à abordagem dos conceitos da identidade Trigonométrica no processo de formação escolar do aluno.

¹ Centro de procedência: Universidade da Katyavala Bwila. Instituto Superior de Ciências de Educação do Sumbe. Angola. Email: zaqueusavilolo@gmail.com - saviloloexenjinina@gmail.com

² Centro de procedência: Universidade da Katyavala Bwila. Instituto Superior de Ciências de Educação do Sumbe. Angola. Email: sabinosilva04@gmail.com

A partir da análise dos resultados obtidos das respostas dos alunos ao longo da realização das actividades é possível verificar que houve uma promoção do conhecimento dos alunos sobre identidades trigonométricas.

Palavras-chaves: Ensino-aprendizagem; identidade trigonométrica; análise trigonométrica e processo ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

This work presents the results of an investigation that was developed together with the students. Objectives, methods employed from the theoretical and practical points of view. In the investigation, theoretical and empirical methods were used, and the relevance consists of problems involving greater difficulties regarding the knowledge of trigonometry in general secondary education, specifically in the 11th grade at Liceu do Sumbe. The methodological foundation that guided our research primarily contemplates the analysis of the data to consolidate the information that indicates how the approach to the topics of trigonometric identities was carried out. The collection of information occurred through a field study by means of a questionnaire that, in turn, is focused on the characterization of the perceptions of the school context and of the general secondary education institution, primarily highlighting the approach to the concepts of trigonometric identity in the student's school education process.

Starting from the analysis of the results obtained from the students' responses throughout the activities, it is possible to verify that there was a promotion of the students' knowledge about trigonometric identities.

Keyword: Teaching-learning; trigonometrical identity; trigonometrical analysis and process teach learning

Introdução:

A investigação educacional é essencialmente interdisciplinária, pela natureza complexa do seu objecto de estudo e a necessidade de focar também as múltiplas interconexões que formam a unidade totalizadora da sua realidade. Isto não nega a existência de momento em que prepondere sua análise filosófica, psicológica, didáctica, sociológica entre outros, nos que resulta necessário o saber especializado. Na actualidade, a tendência integradora com outras ciências e no seio das próprias ciências da educação, se manifesta como uma necessidade para abranger de forma mais integral o estudo dos problemas educacionais angolanos.

O mundo em que vivemos, com suas profundas contradições e elevados desafios, permite compreender a significação que adquire no complexo social o profundo elo entre a ciência, a educação, a cultura e os valores, como expressão essencial do imenso caminho percorrido pelo ser humano na busca da utopia, no que alcançam as mais altas conquistas do intelecto e do sentimento. E, de forma particular, vislumbrar como fica em jogo a fortaleza da formação da humanidade como único e insubstituível valioso frente aos rigores do sistema de conhecimento global, vigente à escala universal, e cujas consequências já estamos sofrendo por seu impacto no desenvolvimento social.

Uma verdadeira sociedade da informação e do conhecimento requer de uma base educativa sólida, consciente e permanente, assim como do desenvolvimento das ciências. Isto implica que no setor educacional se incorporem seus avanços, em particular no Sistema de Ciências e Inovação e Meio Ambiente do Ministério de Educação. Por sua parte, o Sistema de Informação para a Educação tem um papel destacado na elevação da qualidade da educação, dos resultados científicos e inquiridores e da profissionalização dos professores e investigadores, mediante os serviços e produtos informativos que se oferecem ao assumir a integração com os diferentes atores e, em particular, com um enfoque dirigido aos componentes da actividade científica, tendo como centro a gestão da informação científica educativa e a socialização de seus resultados.

Ao fazer referência ao papel da ciência, a educação, a cultura e a sociedade do conhecimento, coexistem em uma aproximação dialéctica como formas de interpretar a realidade objectiva, constituindo suas relações essenciais os trilhos com os que contam a sociedade para resolver os problemas concernentes à formação do homem. Na época contemporânea a escola está chamada a cumprir com o encargo social de preparar o homem de maneira que possa seguir aprendendo durante toda a vida, dotando o de ferramentas que lhe permitam desempenharem-se em um mundo rapidamente cambiante e progressivamente complexo, de uma visão ampla, holística e integradora da realidade, a que solo é possível se modificar os modos de actuar, pensar e sentir dos sujeitos a partir de uma formação sustentada em um alto sentido do dever social; para poder explicá-los complexos fenómenos da realidade objectiva, em um contexto socio-histórico caracterizado por um vertiginoso desenvolvimento da ciência, a tecnologia e a comunicação, cuja estampagem fica na vida de todos.

Desenvolvimento:

Breve historial da trigonometria.

A Matemática, desde seus primórdios, entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização que sua história é não somente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais.

A palavra trigonometria tem origem no grego *trígonos* (triângulos) mais *metria*

(medida), cujo principal objectivo é estudar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo, nasceu como resposta à necessidade da Astronomia e da Navegação.

A trigonometria desenvolveu-se como resultado de uma interacção contínua e fértil entre a oferta e a demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, à Astronomia. Assim, a história da trigonometria mostrou em seu interior o crescimento de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria, Morey, P. (2009).

Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no *Papiro Rhind* e também uma notável tábua de secantes na tábua cuneiforme babilônica. Chace, B. (1986.).

Certo número de papiro egípcio de algum modo resistiu ao resgate do tempo por mais de três milénios e meio. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento, que está agora no British Museum, excepto uns poucos fragmentos que estão no Brooklyn Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquitecto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide, há cerca de 5000 anos. De qualquer modo, a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2000 anos, após um início bastante auspicioso Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*, Editora Blucher, São Paulo. Talvez a mais notável das tábulas matemáticas babilônicas já analisadas. O nome indica tratar-se da tábua da colecção G.A. Plimpton da Universidade de Colômbia, catalogada sob o número 322. A tábua foi escrita no período Babilónico Antigo – aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. – e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer, C., & Sacs, U. (1945). In Eves, H.: *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp. Mas os gregos fizeram um

estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas. Sampaio, P. (2008).



Papiro Rhind, Museu de Londres.

O astrónomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C, ganhou o direito de ser chamado o pai da trigonometria, pois, na segunda metade do século II a.C, fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes - duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica - e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios. Kennedy, E. S. (1994).

O processo de ensino aprendizagem da matemática.

Na investigação se assume o processo de ensino aprendizagem foi historicamente caracterizado de formas diferentes, que vão desde sua identificação como processo de ensino, com um marcado acento no papel central do professor como transmissor dos conhecimentos, até as concepções mais atuais nas que se concebe o processo de ensino - aprendizagem como um todo integrado, no que fica de relevo o papel protagónico do aluno. Neste último enfoque se revela como característica determinante

a integração do cognitivo e o afectivo, do instrutivo e o educativo, como requisitos psicológicos e pedagógicos essenciais.

O processo de ensino aprendizagem tem lugar no transcurso das disciplinas escolares e tem como propósito essencial contribuir à formação integral da personalidade do aluno, constituindo uma via mediatizado fundamental para a aquisição dos conhecimentos, procedimentos, normalização de comportamento, valores legados pela humanidade.

No desenvolvimento do processo o escolar aprenderá diferentes elementos do conhecimento - noções, conceitos, teorias, e leis que formam parte do conteúdo das disciplinas, e de uma vez se apropriará dos procedimentos que o homem adquiriu para a utilização do conhecimento.

No processo de assimilação dos conhecimentos se produz a aquisição de procedimentos, de alternativas, estratégias, que em sua unidade conformarão as habilidades tão específicas das disciplinas como de tipo, mas geral, como são as que têm que ver com os processos de pensamento (análise, síntese, abstracção, generalização, por exemplo: a observação, a comparação, a classificação, entre outras).

Adquirem-se do mesmo modo, como parte deste processo, habilidades que têm que ver com o planeamento, controle e avaliação da actividade de aprendizagem, contribuindo a um comportamento mais reflexivo e regulado do aluno na mesma actividade.

A aquisição dos conhecimentos e habilidades contribuirá gradualmente ao desenvolvimento do pensamento, à formação dos interesses cognitivos e de motivos pela actividade de estudo, sempre que estiver bem concebido. Neste processo de aquisição do conhecimento, de interacção entre os alunos, dão-se todas as possibilidades para contribuir à formação de sentimentos, qualidades, valores, à aquisição de normas de comportamento, aspectos essenciais aos que deve contribuir o desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem (P).

A integralidade do processo de ensino aprendizagem, radica precisamente em que este de resposta às exigências da aprendizagem dos conhecimentos, do desenvolvimento intelectual e físico do escolar e à formação de sentimentos, qualidades e valores, todo o qual dará cumprimento aos objectivos da educação em sentido geral, e em particular aos objectivos de cada nível de ensino e tipo de instituição.

O menino nasce com todas as possibilidades para seu desenvolvimento, não estão predeterminados sua inteligência, seus sentimentos, seus valores, entre outros. É precisamente a interacção deste com o meio social o que determina que possam desenvolvê-las potencialidades que traz para o nascer. O

sistema de influências está dado pelo meio familiar, escolar, e social em geral no que se desenvolve o indivíduo, no qual a qualidade e integralidade da atenção têm planas têm uma incidência decisiva.

Se entendermos que o conduz à aquisição e individualização da experiência histórico social do indivíduo, no qual este se aproxima gradualmente ao conhecimento de uma posição transformadora, então terão uma repercussão significativa as acções colectivas e individuais do sujeito, as quais deverão ser previstas na organização e direcção de dito processo pelo professor. Assumidas pelas investigadoras. Rico, P. & Silvestre, M. (2012).

Chamamos a atenção sobre as acções colectivas já que se deu maior ênfase no trabalho pedagógico a transmitir conhecimentos que a promover emoções, solidariedade e favorecer a satisfação emocional de partilhar os conhecimentos. Hoje em dia se dá um maior consenso, entre os diferentes autores, a ressaltar o valor das actividades em que sobressaia a acção partilhada, em colaboração, que contribua ao desenvolvimento de níveis de consciência superiores do aluno e que os conhecimentos que aprende tenham um sentido pessoal para este.

Tanto as acções colectivas como a acção do professor em relação à actividade do aluno, constituem elementos, mediatizam dores fundamentais do Processo de ensino-aprendizagem, estas características do processo precisam de um conjunto de requerimentos psicológicos e pedagógicos, que permitam seu desenvolvimento de forma efectiva.

A resolução de exercícios e problemas: uma provocação para a educação contemporânea.

Dentro da variedade de modelos existentes para a resolução de exercícios e problemas, podem-se assinalar os de autores como Polya, G (1975); Bell, A (1978); Schoenfeld, A (1987); Müller, H (1981); Campistrous, L e Cacho, C (2000); Ferrer, M (2000); Rebollar, A (2000); Bless, V (2003), entre outros, dirigidos, no fundamental, a revelar o accionar do docente, por isso desde esta perspectiva didáctica os consideramos estratégia de ensino, mais que de aprendizagem ao não pôr toda sua ênfase no que aprende em suas investigações guiam ao resolutor para a solução do problema, não obstante, embora muitos deles enfatizassem na independência dos alunos, oferecem estas ferramentas de modo geral. As fases e ideias essenciais que propõem os autores destes modelos são as seguintes:

O Modelo da Polya: compreender o problema, conceber o plano de solução, executar o plano de solução e visão retrospectiva. Modelo do Bell, emoldurado dentro da linha da Polya, compreende: apresentar o problema em forma geral, reformular o problema em forma operacional, formular hipótese e procedimentos alternativos para enfrentar o problema, provar as hipótese e levar a cabo procedimentos que permitam obter uma solução ou conjunto de soluções, analisar e avaliar as

soluções, as estratégias usadas e os métodos que conduziram ao descobrimento de estratégias para resolver o problema. Modelo do Schoenfeld: análise e compreensão do plano, desenhar e planejar a solução, explorar as soluções, verificar soluções. Modelo de Müller: orientação, elaboração, realização, avaliação. Modelo do Jungk: orientação para o problema, trabalho no problema, solução do problema, avaliar a solução.

As razões de que se inclua nos currículos escolares são múltiplos e variados. Por um lado, constitui uma eficaz ferramenta de trabalho (tanto intelectual como prático); e por outro, a matemática e suas aplicações, conformam uma área de estudo que tenta compreender os modelos que impregnam o mundo que nos rodeia e cuja actividade se poderia resumir mediante a expressão “resolução de exercícios e problemas sobre funções trigonométricas e suas aplicações à Sismologia”.

Por outra parte, na sociedade actual, que experimenta um crescente desenvolvimento científico, e tecnológico e social, considera-se cada vez mais importante ter uma boa preparação física como via de acesso a ditos conhecimentos.

Entretanto, não é só porque está presente em todas as ordens da vida moderna pelo que se justifica estudar esta disciplina. Em geral, a necessidade de ensinar matemática e suas aplicações, atribui-se a diversos fins, os quais se resumem em: a Matemática como instrumento que possibilita resolver diferentes exercícios e problemas do entorno sociocultural, seu valor formativo ao contribuir ao desenvolvimento intelectual e integral da personalidade e a Matemática como linguagem universal das ciências. Neste contexto, a problemática educativa vinculada à resolução de exercícios e problemas aparece como um aspecto importante na aprendizagem da disciplina no ensino médio geral.

Por isso, é essencial que se riskem linhas ou estratégias de trabalho que garantam elevar

Substancialmente as possibilidades da Matemática para contribuir à formação dos alunos e assim favorecer que os conteúdos matemáticos sejam uma ferramenta útil para conseguir resolver com êxito os problemas a que se enfrenta o aluno.

O anterior sustenta o ponto de vista do trabalho de que se requer identificar as variáveis que se relacionam mais directamente com a resolução de exercícios e problemas que conduzem a funções trigonométricas e suas aplicações, considerando os elementos cognitivos e educativos inerentes ao processo para favorecer o desempenho bem-sucedido dos alunos ao enfrentar os exercícios e problemas sobre funções trigonométricas e suas aplicações a diversos campos.

A aquisição de um conhecimento, o desenvolvimento de uma habilidade ou a atenção à formação de uma qualidade, estrutura-se geralmente a partir de antecedentes já adquiridos, por o que o conhecimento do nível obtido respeitando estes antecedentes em cada aluno se converte em um indicador necessário para a concepção e estruturação do processo.

No processo de formação de um conhecimento ou da aquisição de uma habilidade, produz-se o passo gradual de um nível mais simples para outros mais complexos. Pretender inserir-se neste processo sem conhecer o nível de avanço alcançado no aluno seria erróneo, pois, por exemplo: sem os antecedentes requeridos o aluno não pudesse assimilar conhecimentos estruturados a níveis superiores de exigência, ou valer-se de uma habilidade supostamente obtida, para a realização de uma tarefa ou para a aquisição de outra habilidade.

Embora o antes expresso é conhecido em términos gerais na prática pedagógica se tende a realizar uma breve exploração do conhecimento antecedente a modo de aviso, e não ao necessário diagnóstico que ofereça os elementos essenciais para uma adequada estruturação do Processo de Ensino-aprendizagem, ao igual a qualquer outro tipo de processo requer para seu desenvolvimento partir do conhecimento do estado inicial do objeto, neste caso do estado de preparação do aluno, pelo qual a realização do diagnóstico resulta uma exigência obrigada.

Na investigação o diagnóstico permite orientar de forma eficiente, em função dos objectivos propostos, as acções do professor ao conceber e organizar o processo de ensino-aprendizagem e dar atenção às diferenças individuais do aluno: daí, que violar este requerimento conduz a desenvolver o processo sem elementos objectivos,” a ciegas, convirtiñdose” em uma das causas que incide na qualidade do mesmo.

O diagnóstico da preparação do aluno pode abranger diferentes aspectos:

- o nível obtido na aquisição dos conhecimentos,
- nas operações do pensamento,
- nas habilidades intelectuais (observação, comparação, modelação, etc.),
- e o nível obtido no planeamento, controle e avaliação da actividade de aprendizagem.

Do mesmo modo, a actividade de diagnóstico nos permite mediante procedimentos específicos, conhecer o avanço que vai tendo o aluno quanto ao desenvolvimento de normas de conduta, e à formação de qualidades e valores, entre outros aspectos da personalidade.

Todo o anterior requer que o professor ao diagnosticar selecções actividades de aprendizagem que lhe permitam conhecer se se adquiriu o conhecimento e a que nível se obteve, se solo for reprodutivo, se for capaz o aluno de aplicá-lo a situações conhecidas ou a novas situações e determinar, o qual é muito importante, quais elementos do conhecimento não estão obtidos.

Para conhecer os avanços no desenvolvimento das habilidades é necessário seleccionar exercícios nos que lhe exija ao estudante classificar, comparar, resolver, demonstrar etc. De acordo ao que neste caso deveria ter obtido. Precisamente em seus procedimentos para a solução é que podemos constatar a presença de indicadores do desenvolvimento intelectual. O diagnóstico constitui um momento propício para ser orientado pelo professor os níveis de ajuda, no caso daqueles alunos que pressentem dificuldades ao realizar as tarefas, de forma de explorar com precisão suas possibilidades de realização.

A determinação destas precisões aproximará do professor à exploração da zona de desenvolvimento actual e potencial do aluno, para o qual precisará além da utilização de tarefas colectivas de diagnóstico, e de formas de interacção directa com o aluno.

Sistema de exercícios didáctico sobre a análise trigonométrica a partir das considerações teóricas do Conceito: Identidades Trigonómicas no ensino médio geral em Angola.

Objectivo de aprendizagem: Elaboração de sistema de exercícios didático sobre a análise trigonométrico a partir das considerações teóricas do Conceito: Identidades Trigonómicas no ensino médio geral em Angola.

Caracterização gnosiológica da unidade: Trigonometria.

Na concepção da disciplina Matemática, o estudo da trigonometria é uma parte essencial sem a qual não é possível realizar plenamente as funções da disciplina no ensino médio geral.

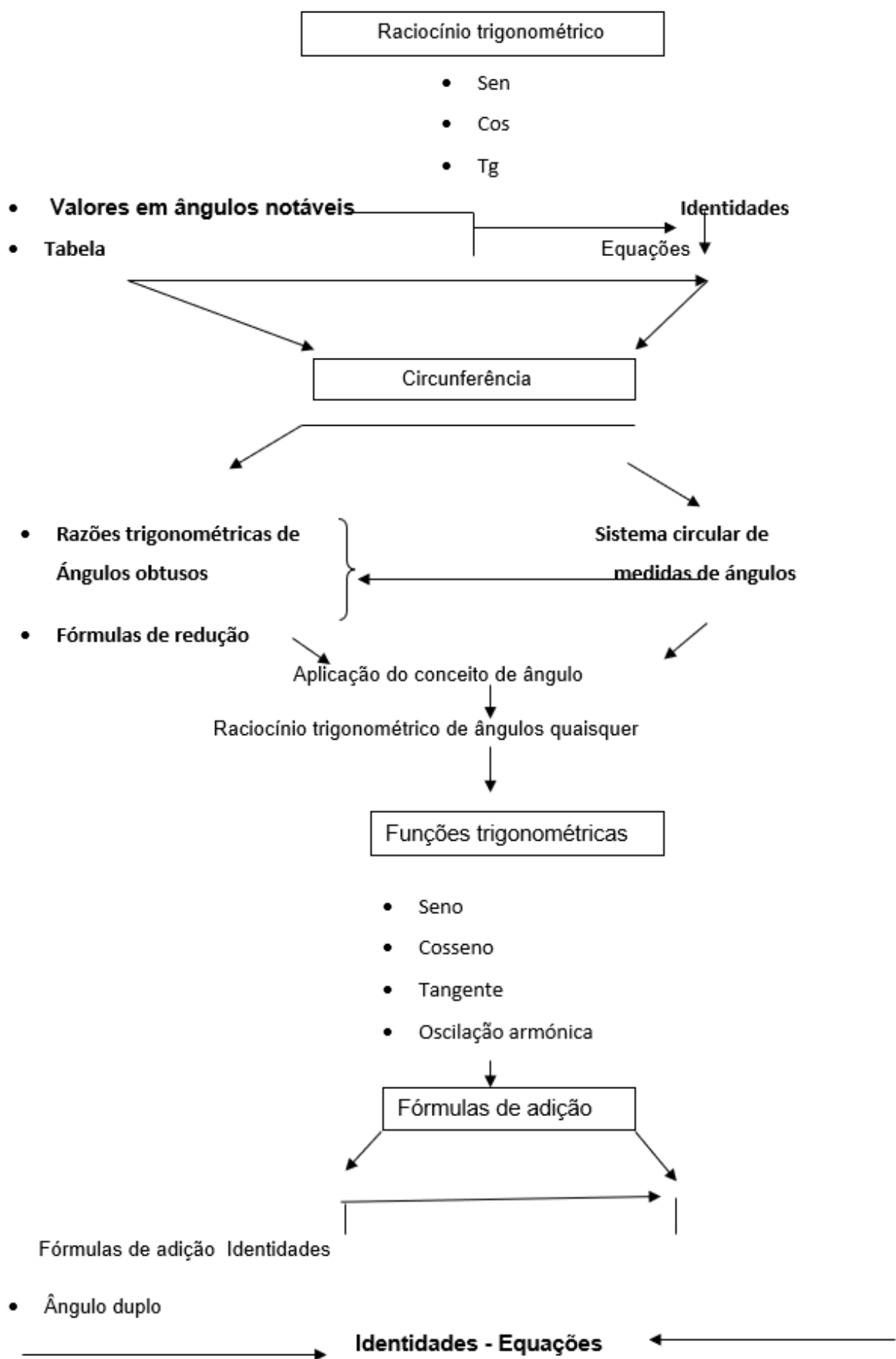
Por estas razões, a trigonometria se estuda no nível médio geral, no nível básico os alunos conhecem as razões trigonométricas no triângulo rectângulo e suas aplicações mais elementares, no nível de profundización aprendem as razões trigonométricas de ângulos quaisquer e estudam as funções trigonométricas, suas propriedades e aplicam os instrumentos da análise a seu estudo.

A importância da trigonometria fica de manifesto quando consideramos que em seu estudo se trabalham virtualmente todas as diretrizes da disciplina, embora em particular terá que destacar:

Trigonometria plana:

- As funções trigonométricas: em trigonometria nos interessa o estudo de certas magnitudes chamadas funções trigonométricas. O objeto de estudo desta temática é definir estas funções e fazer algumas aplicações elementares delas, relacionadas com outras ciências.
- Relações fundamentais. Fórmula de redução.
- Linhas trigonométricas e gráficas.
- Análise trigonométrica: O objeto de estudo desta temática radica nas panorâmicas dos conteúdos anteriores e os novos por conhecer na mesma transitada por: Funções da soma e da diferença de dois ângulos, funções trigonométricas do ângulo dobro e múltiplos e em função do ângulo metade, transformações de soma e diferença e incursionamos nas Identidades trigonométricas e depois as Equações trigonométricas. Função trigonométrica inversa.
- Fundamental, demonstrar – se trabalha na demonstração de identidades e teoremas.
- Matematizar problemas extramatemáticos – se dedica especial atenção à solução de problemas de aplicação utilizando as razões trigonométricas e suas aplicações.

Esta unidade é o núcleo central do estudo da trigonometria na escola e se dedica fundamentalmente ao desenvolvimento da maioria das habilidades gerais do grau:



Neste aspecto centramos a atenção no **conceito de Identidade Trigonométrica**:

Uma identidade trigonométrica é uma igualdade que contém funções trigonométricas e que é verdadeira para todos os valores dos ângulos para os quais estão definidas estas funções:

Consideramos dois métodos de demonstração de identidades trigonométricas do ponto de vista metodológico:

1. Podemos reduzir um membro a forma do outro membro, usando identidades conhecidas. Em geral, o membro mais complicado é reduzido à forma do membro mais singelo.
2. Podemos reduzir ambos os membros, usando identidades conhecidas, à mesma expressão. Então, como os dois membros são idênticos a uma mesma expressão, são idênticos entre si.

Exemplos: Demonstrar as seguintes identidades trigonométricas:

A) $1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = \sec 2x$

Resolução: Primeiro método.

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x &= \sec 2x \\ &= 1 + (2 \operatorname{tg}^2 x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x) \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x) \\ &= (1 + (\operatorname{sen}^2 x) / (\cos^2 x)) / (1 - (\operatorname{sen}^2 x) / (\cos^2 x)) \\ &= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) / (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 1 / (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 1 / \cos 2x \\ &= \sec 2x \end{aligned}$$

Resolução: Segundo método

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x &= \sec 2x = 1 / (\cos 2x) \\ &= 1 + (2 \operatorname{tg}^2 x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x) &= 1 / (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 1 + (\operatorname{sen}^2 x) / (\cos^2 x) / (1 - (\operatorname{sen}^2 x) / (\cos^2 x)) \end{aligned}$$

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x) / (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 1 / (\cos^2 x - \sin^2 x), \text{ luego } 1 + \operatorname{tg} 2x * \operatorname{tg} x = \sec 2x \text{ é uma identidade.}$$

B) $\operatorname{Sen}(x + y) / \operatorname{sen}(x - y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)$ é uma identidade?

Resolução: Segundo método

$$\operatorname{sen}(x + y) / \operatorname{sen}(x - y)$$

$$= (\operatorname{sen} x * \cos y + \cos x * \operatorname{sen} y) / (\operatorname{sen} x * \cos y - \cos x * \operatorname{sen} y)$$

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)$$

$$= (\operatorname{sen} x / \cos x + \operatorname{sen} y / \cos y) / (\operatorname{sen} x / \cos x - \operatorname{sen} y / \cos y)$$

$$= (\operatorname{sen} x * \cos y + \cos x * \operatorname{sen} y) / (\operatorname{sen} x * \cos y - \cos x * \operatorname{sen} y), \text{ luego}$$

$\operatorname{Sen}(x + y) / \operatorname{sen}(x - y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)$ é uma identidade.

Exemplo 2. Demostrar que las siguientes igualdades son identidades:

$$2.1) \operatorname{tg} x * \operatorname{sen} x + \cos x = \sec x. \text{ Resposta:}$$

$$2.2) \operatorname{ctg} x - \sec x * \csc x (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{tg} x.$$

$$2.3) (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) * \operatorname{sen} x * \cos x = 1.$$

$$2.4) \operatorname{sen} y / (1 + \cos y) = (1 - \cos y) / \operatorname{sen} y.$$

$$2.5) \operatorname{ctg}^2 x = \cos^2 x + (\operatorname{ctg} x * \cos x)^2.$$

$$2.6) \operatorname{ctg}(45^\circ - y) / \operatorname{ctg}(45^\circ + y) = (1 + 2 \operatorname{sen} y * \cos y) / (1 - 2 \operatorname{sen} y * \cos y).$$

$$2.7) \cos 2x = (1 - \operatorname{tg}^2 x) / (1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

$$2.8) (\operatorname{sen} x/2 + \cos x/2)^2 = 1 + \operatorname{sen} x.$$

$$2.9) \operatorname{tg} x/2 + 2 \operatorname{sen}^2 x/2 \operatorname{ctg} x = \operatorname{sen} x$$

$$2.10) 1 - 4 \operatorname{sen}^4 x - 2 * \operatorname{sen}^2 x * \cos 2x = \cos 2x$$

Conclusões.

O constante aperfeiçoamento de ensino aprendizagem em função da didáctica para a preparação e superação dos professores no conhecimento sobre Sistema de exercícios didáctico sobre el análise trigonométrico a partir das considerações teóricas de Conceptos: Identidades Trigonómicas no ensino médio general, que contribua à aprendizagem da Matemática dos alunos no segundo ciclo do ensino médio geral, através de um enfoque interdisciplinar dos conteúdos matemáticos, exige convertê-la em património de todos os professores em função de toda a sociedade angolana. Assim se

gera um crescimento notável da criatividade social e se estimula a transmissão e renovação da cultura alcançada nos últimos tempos.

Constitui um aspecto essencial para poder obter a eficiência do Sistema de exercícios didáctico sobre a análise trigonométrica a partir das considerações teóricas de Conceptos: Identidades Trigonométricas no ensino médio geral, que esteja em correspondência com o nível de introdução; assim como sua sistematização no ensino da Matemática que possa obter-se na prática escolar. A implementação na prática do sistema didáctico e sua valoração começou do curso 2018, na província do Cuanza Sul, através do trabalho conjunto do autor da investigação, directores, professores e alunos que colaboraram na sua instrumentação e implementação na prática pedagógica.

REFERÊNCIAS

- Aaboe, A. C. (1984). *Episódios da História Antiga da Matemática*. trad. de J.B. Pitombeira de - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Addine, F. (2011). *Compêndio de Teoría e prática*. Editorial. Povo e Educação. La Habana.
- Boyer, C. E. (1974). *História da Matemática*. - trad. Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- Brito, A. J., & Morey, B. (2004). Geometria e trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. In: *Presenças Matemáticas*. Natal: Edufrn.
- Chace, B. (1986.). *The Rhind Mathematical Papyrus*.- volume 8 - Collection Classics in Mathematics Education of The National Council of Teachers of Mathematics – NC Classics TM 2ª Edição, U.S.A.
- Comenius, J. A. (1997). *Didáctica magna/Comenius*. Trad. São Paulo: Martins Fonte.
- Conceição, F. H., & Almeida, M. J. (2013). *Dificuldades de alunos da EJA em relação a conteúdos matemáticos*.
- Costa, N. M. (1997). *Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador*. 250f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- D’Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à acção: Reflexões sobre Educação e Matemática*. Ed. São Paulo: Summus.
- Eves, H. D. (1995). *Introdução à História da Matemática*. - Editora da UNICAMP.
- Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores associados.
- Gladki, A. V.: Sobre el sistema metodológico de V. F. Shatalov. *Revista Matemática en la escuela* # 4. 1988. p. 38 -42. En ruso.

- Gelson, L. (1977). Fundamentos de Matemática Elementar; 2ª Edição, São Paulo, Actual.
- Germano, O. G. (1999). Sabor e Saber: Matemática é vida. In.: *Salto para o futuro: Ensino Fundamental/* Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, SEED.
- Giovanni, J. R., & Giovanni, J. (2011). *Matemática Fundamental: Uma nova abordagem ensino médio*, Volume único; 2ª Edição, São Paulo: FTD.
- González, S. A. (2002). *Folheto de Didáctica A Aprendizagem*. Setembro. Noções de Sociología, Psicología e Pedagogía. A Havana: Editorial Povo e Educação.
- Guetmanova, A. y otros: *Lógica: en forma simple sobre lo complejo*. Dicionario. Editorial Progreso. Moscú. 1991.
- Granville, S. M. (1966). *Trigonometria Plana y Esferica*. La Habana Edicion Revolucionar.
- Ibercima, L. (1992). *Análise comparada do currículo de Matemática (Nível Médio) na Ibero América*. Editorial Mare Nostrum, Madrid. Influência da formulação do enunciado e do controle didáctico sobre a actividade intelectual dos alunos na resolução de problemas. F. Langlois... [et ao]. Em *Revista Ensino das Ciências*, Vol. 13, #2.
- Ibarramartín, F. (1988). *Metodologia da investigação social*. La Havana: Editorial Povo e Educação.
- John, A. F., & Morey, B. (2009). *Matemática e medida: três momentos históricos* – São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMAT, vários autores.
- Kennedy, E. S. (1994). *Tópico de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*, volume 5: Trigonometria, Ed. Actual Ltda.
- Koliaguin, Yu. M.: *Metodologia do ensino da Matemática na escola medeia*. Editorial Instrução. 1975. Em russo.
- Krutietski, V. A.: *Questione gerais sobre a estrutura das capacidades matemática*. Em *Antologia da Psicologia pedagógica e das idades*. Editorial Povo e Educação. Cidade de Havana. 1986.
- Lei n.º 17/16, de 07 de Outubro de 2016 - Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino. Angola.
- Lima, E. L. (1991). *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. - I.M.P.A. Vitae, Rio de Janeiro.
- Lobo, C. M. (1997). *Funções Seno e Coseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental*. E do computador. Dissertação de Mestrado, PUC/SP.

- Machado, N. J. (2006). *Matemática e Educação: Alegorias, tecnologias e temas afins*, 5. Ed. – São Paulo, Cortez, – (coleção questão da nossa época).
- Maracchia, S. (2007). *Storia delle equazioni e dei sistemi di primo grado*. Roma: Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza,.
- Mayor, F. F., & Augusto, R. L. (1998). *Ciência e poder*. Campinas, SP: Papirus.
- Mendes, R. (2005). *História da matemática em actividades didácticas*. [et al.]. Natal, RN: Edufrn Editora da UFRN.
- Ministério de Educação. (2013) *Programa de Matemática da 10ª classe*. 2º ciclo do Ensino Secundário Geral. Área de Ciências Humanas. Luanda, Angola: Editora Moderna, S.A.
- Pardinas, F. (1975). *Metodologia e técnicas de investigação em Ciências Sociais*. México, D. F.: Siglo Veintiuno. Editores. Décima terceira Edição.
- Roque, T. (2008). *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. 1ª. Ed. São Paulo.
- Sampaio, H. R. (2008). *Uma abordagem histórico-filosófica na educação Matemática: Contribuições aos processos de aprendizagens de trigonometria no Ensino Médio* – Londrina, 188f: il.
- Sierpinski, A. (1985). *Obstacles Épistémologiques Relatifs a la Notion de Limite*.- RDM vol. 6, 1, pp 5-67.
- Struik, D. J., & Santos, G. (1992). *História Concisa Das Matemáticas*. Ed. Gradiva, Lisboa.
- Toscano, G. & Garbi, H. (2007). *O Romance das Equações Algébricas*. Makron Books, São Paulo.
- Valente, W. R. (2007). *Uma história da matemática escolar no Brasil* São Paulo: Annablume.
- Vergnaud, G. (1994). *Epistemology and Psychology in Mathematics Education*. em *Mathematics and Cognition*., Nesher, P. e Kilpatrick, J., pp 14 -30, Cambridge University Press.
- Vigostky, L. S. (1968). *Pensamiento y Lenguaje*, La Habana, Edición evolución. Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. Editorial Científica Técnica, La Habana.
- Watanabe, R. G. (1996). *Seno de 30 é um meio?*- Revista do Professor de Matemática - nº 30, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.