

Investigando raízes reais de polinômios: uma abordagem com o teorema de Bolzano.

Investigating real roots of polynomials: an approach using Bolzano's theorem.

Carlos Kleber Alves do Nascimento

RESUMO

A busca pelas raízes reais de um polinômio é um problema clássico da Matemática e de fundamental importância para a resolução de diversos problemas do Ensino Médio. Assim, este artigo reúne três teoremas que facilitam essa busca, com destaque para o Teorema de Bolzano, o Teorema das Raízes Racionais e a Regra de Sinais de Descartes por meio da qual é possível estabelecer um limite superior para o número de raízes reais positivas ou negativas, considerando suas multiplicidades, apenas analisando o número de variações de sinais na sequência dos seus coeficientes reais.

O artigo evidencia que a utilização conjunta desses teoremas pode constituir um instrumento didático para estudantes do Ensino Médio na investigação das raízes reais de um polinômio com coeficientes reais. Entre os resultados apresentados, destaca-se o Teorema de Bolzano, que, em condições adequadas, garante a existência de pelo menos uma raiz real em um determinado intervalo. A fim de facilitar a compreensão dos teoremas são apresentadas as definições de polinômio, valor numérico e raiz real, seguidos de alguns exemplos e aplicações.

Além disso, são discutidas as relações entre as raízes reais de um polinômio e as abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas. Assim, o

artigo apresenta uma abordagem didática, utilizando exemplos de resolução de equações e suas respectivas interpretações geométricas, com o objetivo de auxiliar os estudantes na investigação das raízes reais de um polinômio.

Palavras-chave: Raízes reais, Teorema de Bolzano, Teorema das Raízes Racionais, Regra de Sinais de Descartes.

ABSTRACT

The search for the real roots of a polynomial is a classic problem in Mathematics and of fundamental importance for solving various problems in High School. Thus, this article brings together three theorems that facilitate this search, highlighting Bolzano's Theorem, the Theorem of Rational Roots, and Descartes' Rule of Signs, through which it is possible to establish an upper limit for the number of positive or negative real roots, considering their multiplicities, simply by analyzing the number of sign variations in the sequence of their real coefficients.

This article demonstrates that the combined use of these theorems can constitute a didactic tool for high school students in investigating the real roots of a polynomial with real coefficients. Among the results presented, Bolzano's Theorem stands out, which, under appropriate conditions, guarantees the existence of at least one real root in a given interval. In order to facilitate the understanding of the theorems, the definitions of polynomial, numerical value, and real root are presented, followed by some examples and applications.

Furthermore, the relationships between the real roots of a polynomial and the x-coordinates of the points where the graph intersects the x-axis are discussed. Thus, the article presents a didactic approach, using examples of equation solving and their respective geometric interpretations, with the aim of assisting students in investigating the real roots of a polynomial.

Keywords: Real roots, Bolzano's Theorem, Rational Root Theorem, Descartes' Rule of Signs.

1. INTRODUÇÃO

É fato que o estudo de equações polinomiais é de fundamental relevância para a vida escolar dos alunos do Ensino Médio, visto que eles se deparam com diversas situações reais — tanto na matemática quanto em outras áreas do conhecimento — em que é preciso representar em linguagem algébrica fenômenos por meio de fórmulas e equações. Tais estudos iniciam-se no Ensino Fundamental e, aos poucos, ganham importância à medida que o aluno evolui para o estudo das funções e o cálculo dos zeros (raízes), como nas funções afim e quadrática.

Essa necessidade de transposição de situações reais para a linguagem algébrica é corroborada por Silva, Santos e Barbosa (2022), que defendem que o domínio das equações polinomiais desenvolve o pensamento algébrico, tornando o conteúdo diretamente aplicável ao cotidiano do estudante. Sob essa ótica, o estudo de polinômios deixa de ser um conjunto de algoritmos abstratos e assume o papel de ferramenta de modelagem.

Existem diversos teoremas na matemática que permitem investigar as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais; muitas dessas soluções não são simples de determinar, pois demandam conhecimentos de Análise Matemática. O foco deste artigo é apresentar um material para estudantes e professores do Ensino Médio que facilite a busca por essas raízes.

Inicialmente, são trabalhados conceitos como o de polinômios e suas raízes reais. Em seguida, apresentam-se três teoremas:

- O **Teorema de Bolzano**, que ganhou destaque neste artigo e que, em condições adequadas, garante a existência de pelo menos uma raiz real em um determinado intervalo.
- O **Teorema das Raízes Racionais**, que permite fazer uma previsão sobre as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros.
- O **Teorema de Descartes para polinômios** (ou Regra de Sinais de Descartes), por meio da qual é possível estabelecer um limite superior para o número de raízes reais positivas ou negativas, considerando suas multiplicidades, por meio da análise do número de variações de sinais na sequência dos seus coeficientes reais.

Para ilustrar, foram incluídos diversos exemplos e aplicações acessíveis a estudantes do Ensino Médio. A aplicação conjunta desses teoremas na mesma equação pode otimizar a busca por raízes reais, sem a necessidade de resolvê-las completamente. Além disso, como recursos didáticos para facilitar a compreensão, construíram-se gráficos utilizando ferramentas computacionais, como o GeoGebra e a linguagem Python.

2. Polinômios e raízes reais

2.1 Definição de polinômio

Um polinômio na variável real x é uma expressão do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ e n um número **natural**.

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são os **coeficientes reais**.

0 grau do polinômio é um número natural correspondente ao maior expoente de x , com coeficiente não nulo.

Exemplo: Seja $p(x) = x^2 - 5x + 2$. Temos um polinômio com coeficientes reais 1, -5 e 2 e grau 2.

Exemplo: Seja $p(x) = 2x^3 + 4x - 3$. Temos um polinômio com coeficientes reais 2, 0, 4 e -3, pois é equivalente a $p(x) = 2x^3 + 0x^2 + 4x - 3$. O grau é 3.

2.2 Valor numérico e Raiz real

O valor numérico de um polinômio $p(x)$, para $x = a$ é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando as operações indicadas pela expressão que define o polinômio. Indicamos por $p(a)$, com a real.

Se $p(a) = 0$, o número a é chamado **raiz** ou **zero** de $p(x)$.

Exemplo: Se $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$, o valor numérico de $p(x)$ para $x = 2$ é:

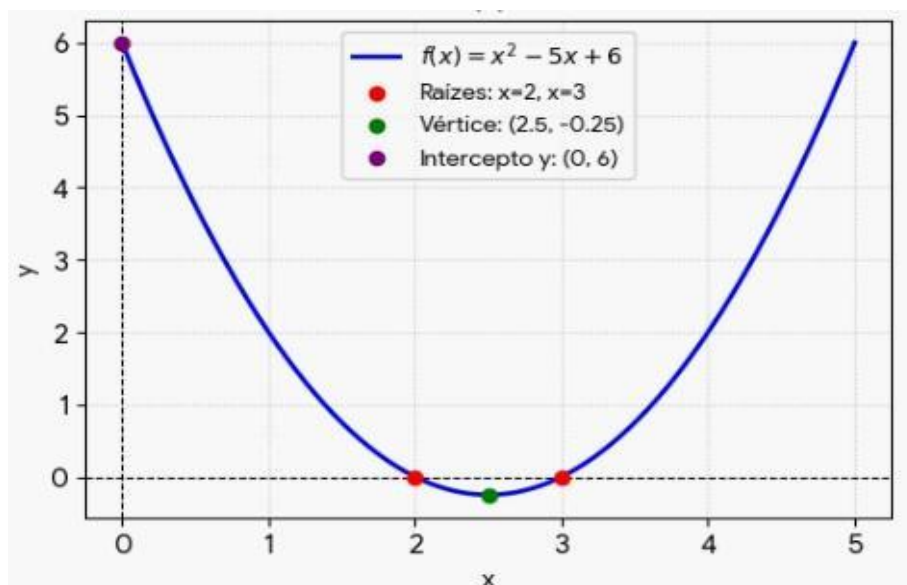
$p(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 8 + 8 + 2 - 3 = 15$. Como $p(2) \neq 0$, então 2 não é raiz de $p(x)$.

Exemplo: Verifique se 1 é raiz de $p(x) = x^4 - x^3 + x - 1$.

Temos que $p(1) = 1^4 - 1^3 + 1 - 1 = 0$. Logo, 1 é raiz de $p(x)$.

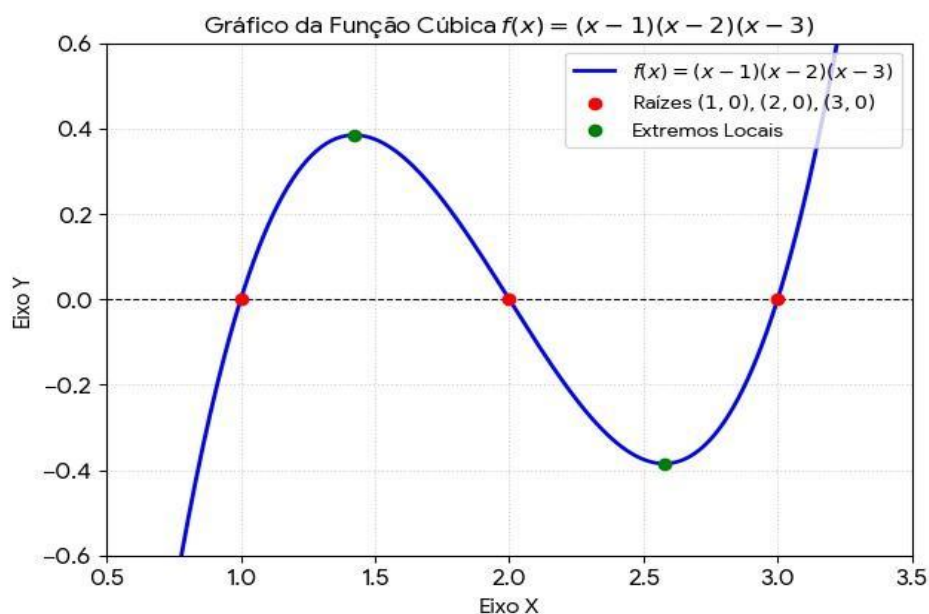
2.3 Interpretação gráfica

Considere o gráfico do polinômio $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja que $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$ e $f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$, ou seja, 2 e 3 são as raízes do polinômio e essas são as abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo Ox. Considere o gráfico do polinômio $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$:



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

$f(1) = (1-1) \cdot (1-2) \cdot (1-3) = 0$, $f(2) = (2-1) \cdot (2-2) \cdot (2-3) = 0$ e $f(3) = (3-1) \cdot (3-2) \cdot (3-3) = 0$.

Perceba que 1, 2 e 3 são as raízes reais do polinômio e também os valores onde o gráfico intersecta o eixo x. De modo geral, as raízes reais de um polinômio $p(x)$

com coeficientes reais correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo Ox.

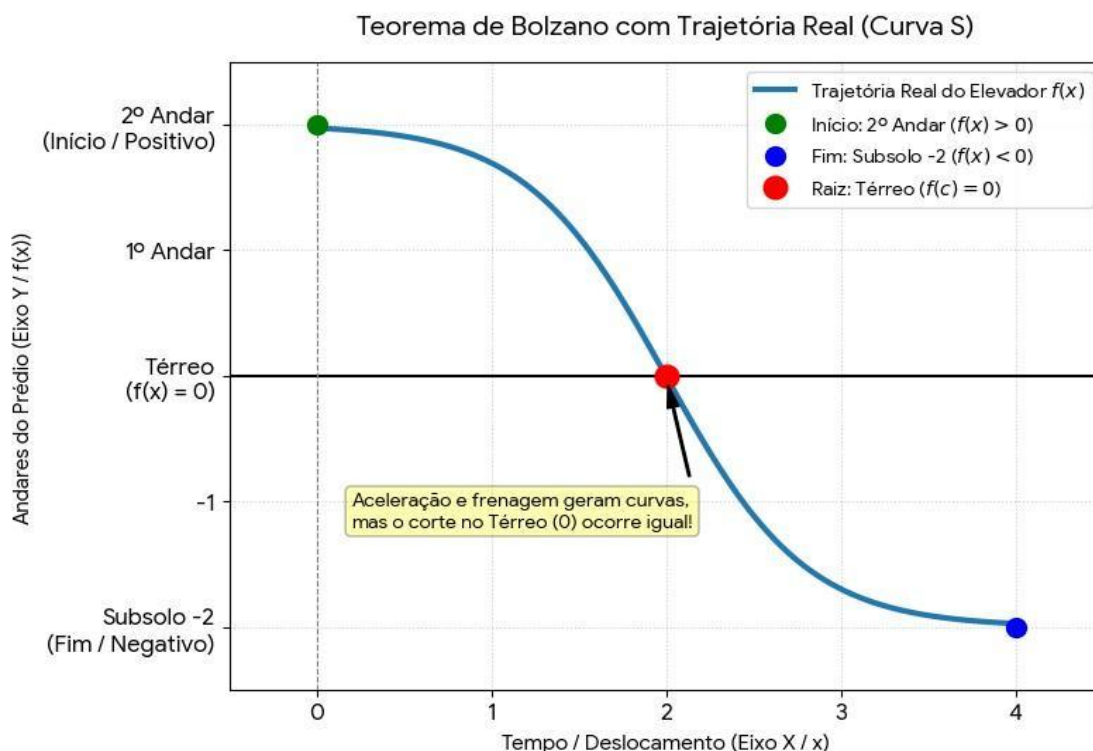
3. O Teorema de Bolzano

Considere o polinômio com coeficientes reais de grau n dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e seja (a, b) um intervalo real. Então:

Se $p(a) \cdot p(b) < 0$, então polinômio $p(x)$ possui pelo menos uma raiz real $c \in (a, b)$.

Além disso, considerando as raízes com suas multiplicidades, o número de raízes reais no intervalo é ímpar. Se $p(a) \cdot p(b) > 0$, não podemos garantir a existência de raízes no intervalo dado.

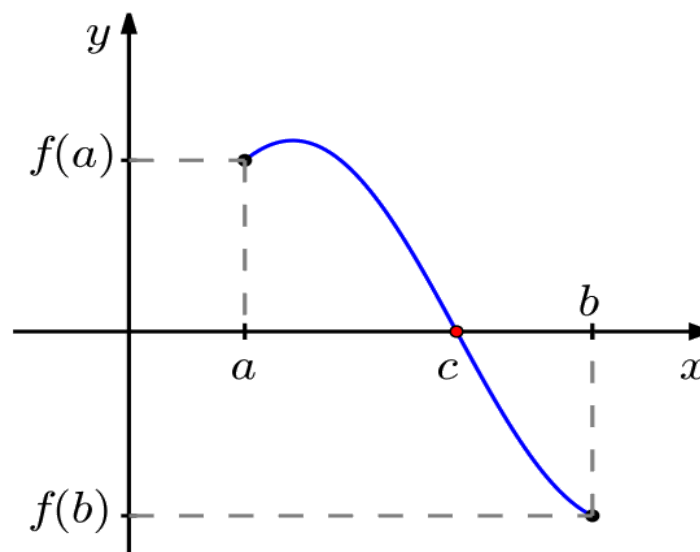
Didaticamente, imagine, por exemplo, que você está no 2º andar ($f(x) > 0$) de um elevador e o mesmo desce até o subsolo -2 ($f(x) < 0$), perceba que ele deve passar pelo andar térreo ($f(x) = 0$):



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Uma vez que o movimento é contínuo e muda de sinal, pois vai do positivo $f(a) > 0$ para o negativo $f(b) < 0$, a linha azul contínua é obrigada a cortar o térreo no ponto vermelho onde

$f(c) = 0$, ou seja, se o intervalo (a, b) é tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ então $f(x)$ possui pelo menos uma raiz real c . No geral, temos:



Fonte: Matematica.pt (2026).

4. Exemplos

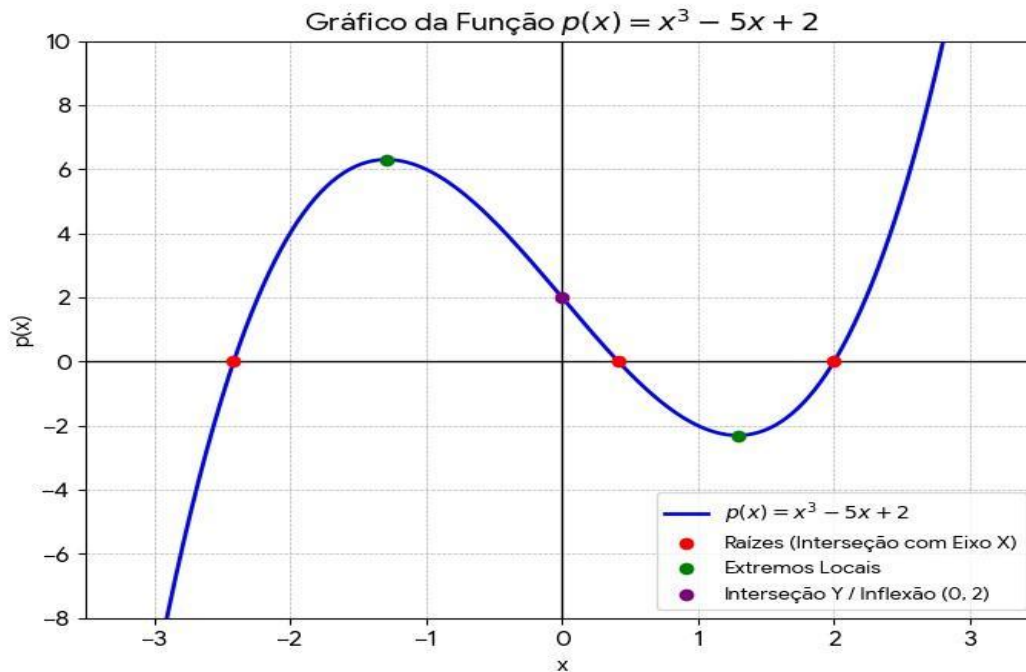
Exemplo 1

$$p(x) = x^3 - 5x + 2$$

$$p(0) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$p(1) = 1^3 - 5 \cdot 1 + 2 = -2$$

Logo, como $p(0) \cdot p(1) < 0$, existe pelo menos uma raiz real entre 0 e 1.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Analisando o gráfico acima percebemos que:

- No intervalo $(0,1)$ existe uma única raiz real.
- No intervalo $(-3,3)$ temos que $f(-3) \cdot f(3) < 0$ e temos 3 (ímpar) raízes reais.

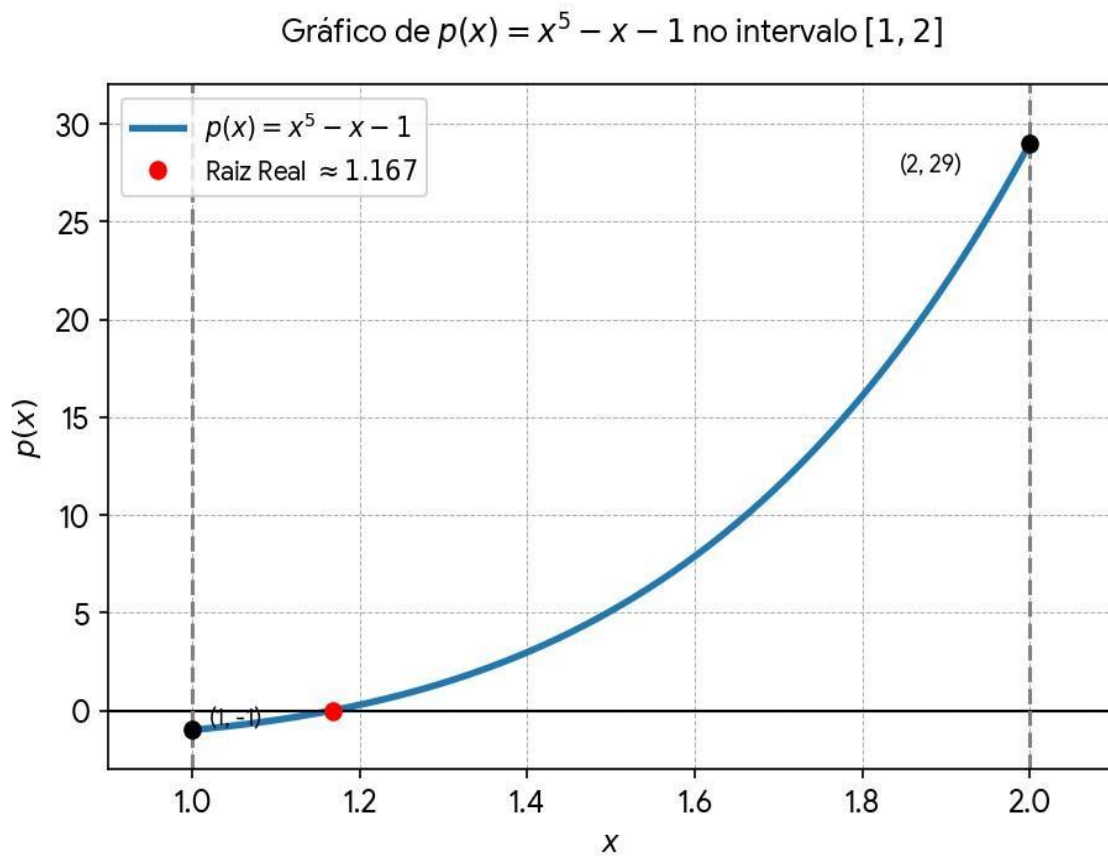
Exemplo 2

$$p(x) = x^5 - x - 1$$

$$p(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1$$

$$p(2) = 2^5 - 2 - 1 = 29$$

Assim, como $p(1).p(2) < 0$, o teorema nos garante pelo menos uma raiz real entre 1 e 2:



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

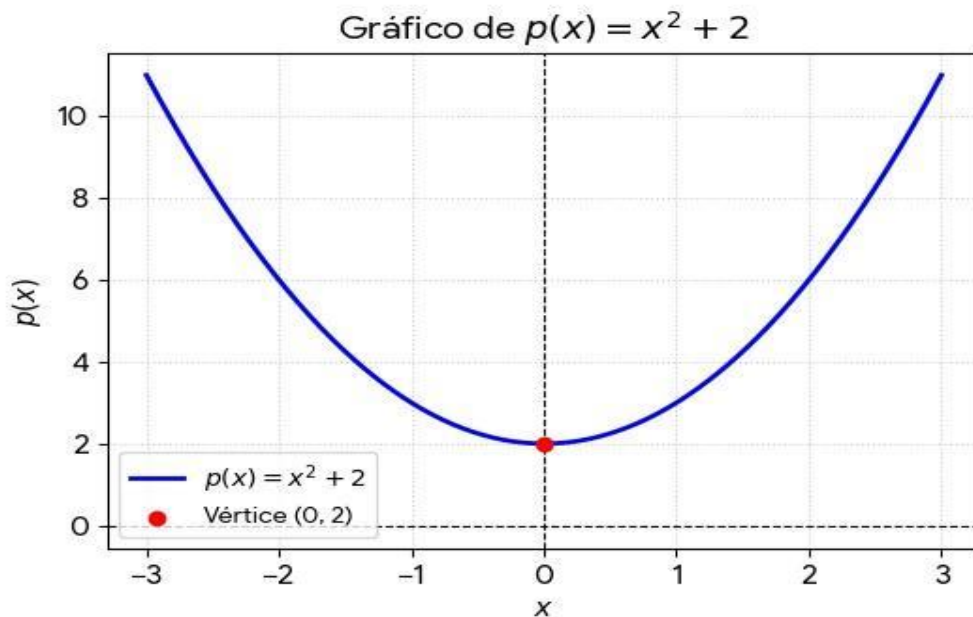
Exemplo 3

$$p(x) = x^2 + 2$$

$$p(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$$

$$p(1) = 1^2 + 2 = 3$$

Como $p(-1) \cdot p(1) > 0$, não podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que exista uma raiz real nesse intervalo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Observando o gráfico percebemos que o gráfico não intercepta o eixo Ox , portanto, o polinômio não possui raiz real.

Algebricamente, como para todo x real, $x^2 > 0$ segue que $p(x) = x^2 + 2 > 0$, para todo x e, portanto, $p(x)$ não possui raízes reais.

5. Outros teoremas importantes

5.1 Teorema das Raízes Racionais

Teorema: Se o número racional r/s , com r e s primos entre si, $s \neq 0$, for raiz da equação com coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ com $a_0 \neq 0$, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n .

Este teorema permite fazer uma previsão sobre as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Algumas observações importantes:

1. Este teorema não garante a existência de raízes racionais, mas no caso de elas existirem, mostra como obtê-las.
2. O teorema possibilita a formação de candidatos a raízes racionais obtidas dos divisores de a_n e a_0 . Se nenhum elemento deste conjunto for a raiz da equação, esta não admite raízes racionais.

3. Se $a_n = \pm 1$ e os demais coeficientes são inteiros, a equação não admite raízes fracionárias, podendo, entretanto, admitir raízes inteiras que são divisores de a_0 .

4. Para formar o conjunto das possíveis raízes racionais da forma r/s é suficiente fazermos $r \in \mathbb{Z}$ e $s \in \mathbb{Z}$; com $s \neq 0$.

Exemplo

Determine as raízes racionais do polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Nesse caso, r é divisor de $a_0 = -6$ e s é divisor de $a_n = 1$.

Assim, $r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ e $s \in \{\pm 1\}$ e daí $r/s \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Devemos testar o conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$p(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

$$p(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

$$p(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

Dessa forma, 1, 2 e 3 são as raízes racionais da equação.

5.2 Regra de Sinais de Descartes

Teorema: O número de raízes reais positivas de um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais não excede o número de trocas de sinais nos seus coeficientes

Para aplicar a Regra de Sinais, o polinômio deve estar com os termos ordenados do maior grau para o menor, eliminando os termos, caso existam, com coeficiente 0.

Cada mudança de $+$ para $-$ ou de $-$ para $+$ é considerada uma troca de sinal.

Ademais, se N é o número de trocas de sinais, então o número de raízes positivas contadas com as multiplicidades é igual a N ou N menos um número par ($N - 2, N - 4, \dots$) até chegar a 0 ou 1.

A mesma regra pode ser aplicada para o número de raízes reais negativas de $p(x)$, calculando-se $p(-x)$, pois as raízes positivas de $p(-x)$ são as negativas de $p(x)$, mudando apenas o sinal.

Exemplo

Determine o número de trocas de sinais e o número de raízes positivas e negativas de $p(x) = x^2 - 5x + 6$.

A sequência de sinais dos coeficientes é:

+ - +
+ - +

Temos, portanto, 2 trocas de sinais. Dessa forma, o número de raízes positivas é 0 ou 2.

Como $p(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$ tem coeficientes todos positivos, não há troca de sinal, daí não temos raízes reais negativas.

Veja que $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ e $p(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ ou seja, 2 e 3 são as raízes positivas de $p(x)$.

Exemplo

Determine o número de raízes reais positivas e negativas do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 8$.

A sequência de sinais dos coeficientes é + - + + - .

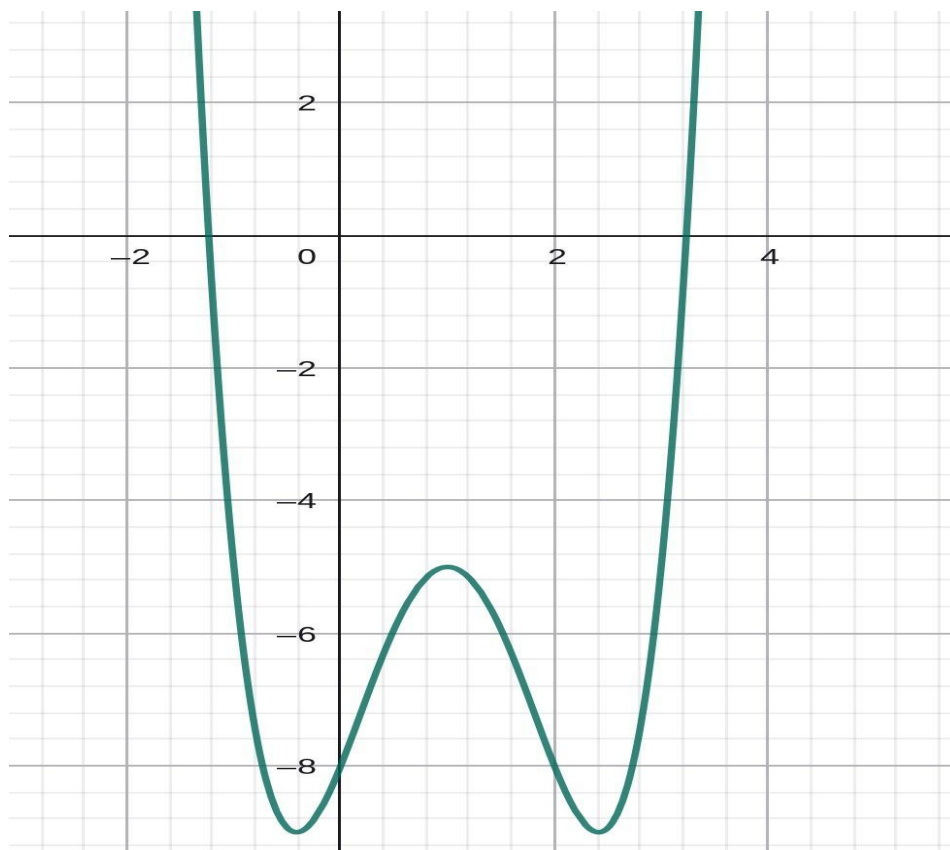
+ - + + - +
- + + -
+ - + + -

Como temos 3 mudanças de sinais, então o número de raízes reais positivas é 3 ou 1.

Como $p(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 + 2(-x)^2 + 4(-x) - 8 = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, sequência de sinais é :

+ + + - -

Temos 1 troca de sinal, portanto, exatamente uma raiz negativa. De fato, usando o software como GeoGebra, vemos 1 raiz real negativa e 1 positiva.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra

6. Atividades propostas

Atividade 1

Use o Teorema de Bolzano para mostrar que $p(x) = x^3 + x - 1$ possui raiz real entre 0 e 1.

$$p(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$$

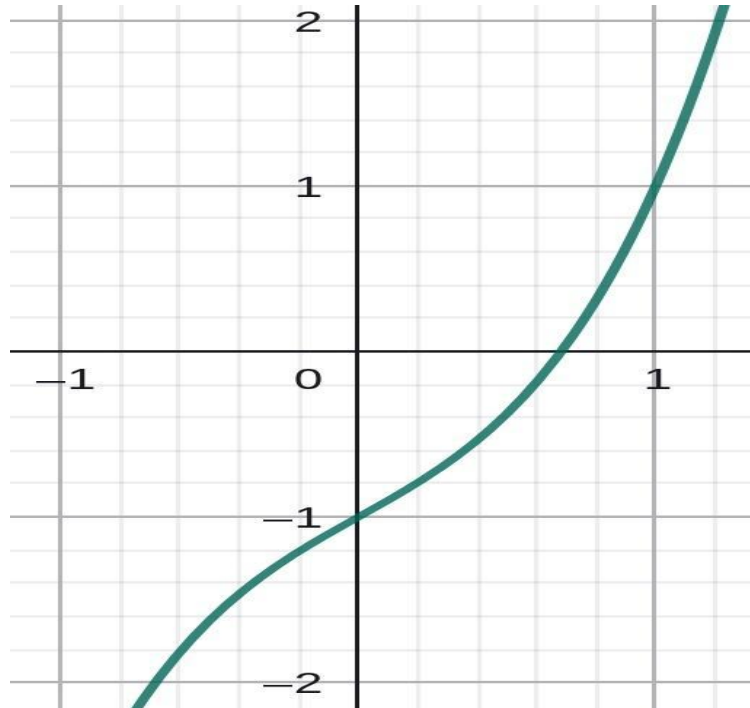
$$p(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$$

Veja que como $p(0) \cdot p(1) < 0$, o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos uma raiz real no intervalo $(0,1)$. Como a sequência de sinais dos coeficientes é

+ + -

e ocorre 1 troca de sinal, a Regra de Sinais de Descartes garante que $p(x)$ tem apenas 1 raiz real positiva.

Verifiquemos tal fato construindo o gráfico de $p(x) = x^3 + x - 1$ utilizando o software Geogebra:



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra

Atividade 2

Encontre uma raiz aproximada do polinômio $p(x) = x^4 + x - 5$, utilizando o Teorema de Bolzano.

$$p(1) = 1^4 + 1 - 5 = -3$$

$$p(2) = 2^4 + 2 - 5 = 13$$

Como $p(1) \cdot p(2) < 0$ e ocorre apenas 1 troca de sinal na sequência dos coeficientes, temos exatamente 1 raiz real positiva no intervalo $(1,2)$. Fazendo mais alguns testes

$$p(1,5) = (1,5)^4 + 1,5 - 5 = 5,0625 + 1,5 - 5 = 1,5625.$$

$$p(1,4) = (1,4)^4 + 1,4 - 5 = 3,8416 + 1,4 - 5 = 0,2416 > 0$$

$$p(1,3) = (1,3)^4 + 1,3 - 5 = 2,8561 + 1,3 - 5 = -0,8439 < 0$$

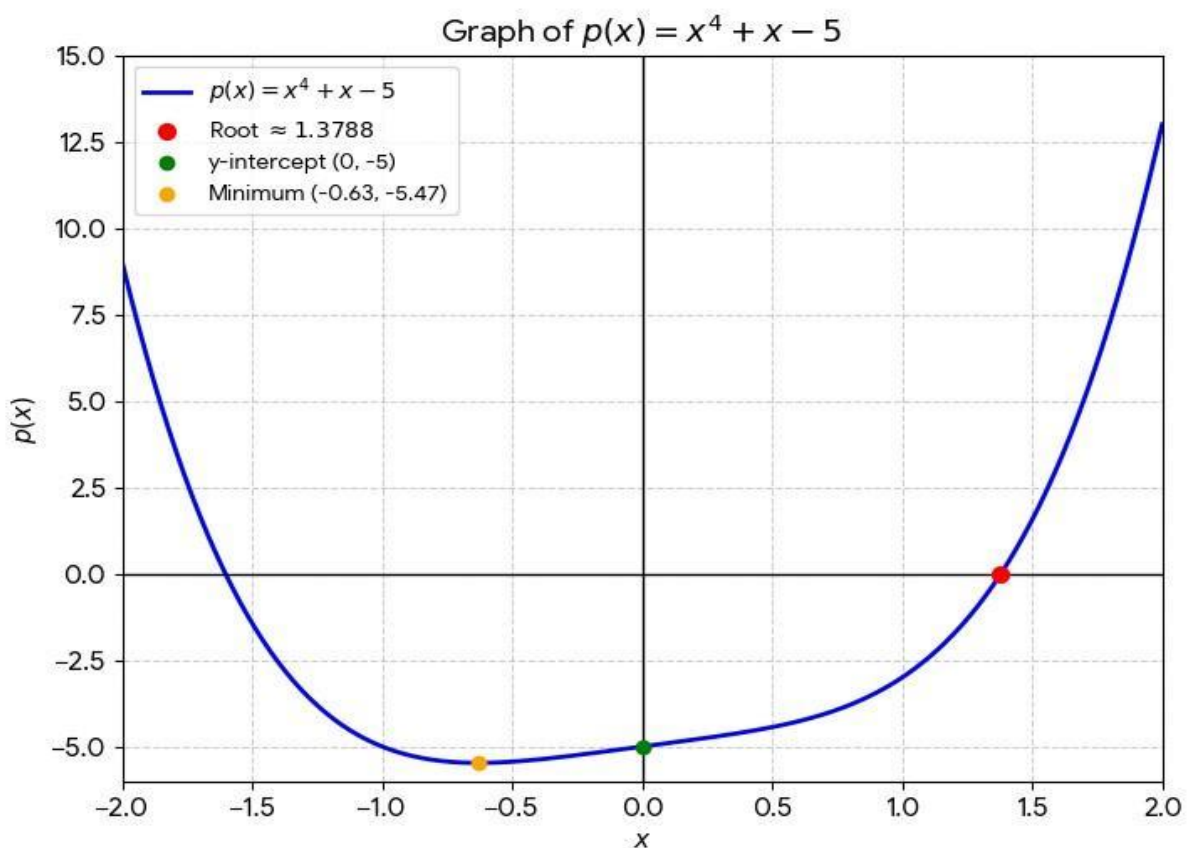
Como $p(1,3) \cdot p(1,4) < 0$, então existe uma raiz entre 1,3 e 1,4. Fazendo mais alguns testes para refinar a solução:

$$p(1,35) = (1,35)^4 + 1,35 - 5 = 3,3215 + 1,35 - 5 = -0,3285$$

$$p(1,37) = (1,37)^4 + 1,37 - 5 = 3,5227 + 1,37 - 5 = -0,1072$$

$$p(1,38) = (1,38)^4 + 1,38 - 5 = 3,6267 + 1,38 - 5 = 0,0067$$

Assim, 1,38 é uma boa aproximação com 2 casas decimais para a raiz de $p(x)$. Veja o gráfico abaixo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Atividade 3

Use a Regra de Sinais de Descartes para estimar o maior número de raízes positivas (limite superior) do polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$.

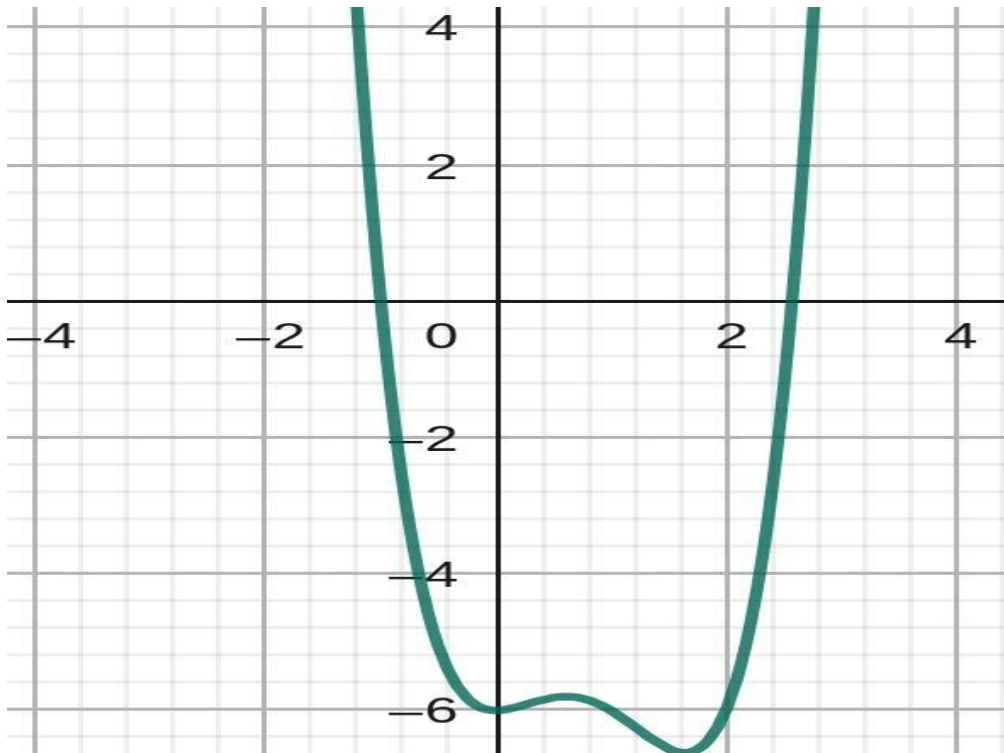
A sequência de sinais dos coeficientes é:

+ - + -

+ - + -

+ - + -

São 3 trocas de sinais, portanto, temos 1 ou 3 raízes positivas; portanto são no máximo 3 raízes. Em particular, verificamos pelo gráfico abaixo que $p(x)$ só possui 1 raiz positiva.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra

Atividade 4

Use os três teoremas mencionados neste artigo para encontrar as raízes da equação $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

Utilizando a Regra de Sinais para saber a quantidade de trocas de sinais:

+ - - +

+ - - +

Temos 2 trocas de sinais, portanto, o número de raízes positivas é 2 ou 0. Analisando o número de trocas de sinais de $p(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x)^2 - 4(-x) + 3 = -2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$

- - + +

Ocorre 1 troca de sinal, portanto, temos exatamente 1 raiz real negativa. Assim, temos

- 2 ou 0 raízes reais positivas
- 1 raiz real negativa

Vamos usar o teorema de Bolzano para investigar os intervalos reais onde essas raízes possam estar:

$$\begin{aligned}p(0) &= 2.0^3 - 5.0^2 - 4.0 + 3 = 3 \\ p(1) &= 2.1^3 - 5.1^2 - 4.1 + 3 = -4\end{aligned}$$

Temos uma raiz positiva entre 0 e 1. Como já encontramos uma raiz positiva e pela Regra de Sinais temos 2 ou 0 raízes positivas, resta localizar mais 1 raiz positiva.

$$p(-2) = 2.(-2)^3 - 5.(-2)^2 - 4.(-2) + 3 = -25$$

Assim, uma vez que $p(0) = 3 > 0$ e $p(-2) < 0$, existe uma raiz negativa entre -2 e 0.

Utilizando o teorema das raízes racionais em $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, sendo r é divisor de $a_0 = 3$ e s é divisor de $a_n = 2$, temos que $r \in \{\pm 1, \pm 3\}$ e $s \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e daí $r/s \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 1/2, \pm 3/2\}$.

Temos uma 1 raiz entre 0 e 1, e entre -2 e 0, fazendo o teste com os valores da lista para $x = 1/2$ e $x = -1$:

$$\begin{aligned}p(1/2) &= 2.(1/2)^3 - 5.(1/2)^2 - 4.(1/2) + 3 = 1/4 - 5/4 - 2 + 3 = 0 \\ p(-1) &= 2.(-1)^3 - 5.(-1)^2 - 4.(-1) + 3 = -2 - 5 + 4 + 3 = 0\end{aligned}$$

Portanto, $1/2$ é raiz e -1 são raízes. Falta encontrar a outra raiz positiva. Como $p(1) = -4$ e a maior raiz positiva dos candidatos racionais é 3, determinemos $p(4)$ para verificar se existe uma raiz entre 1 e 4:

$$p(4) = 2.4^3 - 5.4^2 - 4.4 + 3 = 128 - 80 - 16 + 3 = 35 > 0$$

Logo, temos uma raiz entre 1 e 4. Testando $x = 3$ da lista:

$$p(3) = 2.3^3 - 5.3^2 - 4.3 + 3 = 54 - 45 - 12 + 3 = 0$$

Assim, as raízes de $p(x)$ são -1, $1/2$ e 3.

7. CONCLUSÃO

Vimos, neste artigo, que encontrar as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais muitas vezes não é uma tarefa simples. No entanto, a combinação de alguns teoremas, como o Teorema de Bolzano, a Regra de Descartes e o Teorema das Raízes Racionais, constitui uma ferramenta importante na busca por essas raízes.

O artigo deu destaque ao Teorema de Bolzano, por meio do qual é possível investigar a existência de raízes reais em um determinado intervalo. Embora não seja possível encontrar o valor exato da raiz por meio desse teorema, em condições adequadas, ele garante a existência de pelo menos uma raiz real em um determinado intervalo. Além disso, podemos aplicá-lo iterativamente para obter um valor aproximado da raiz, caso ela não seja inteira, por exemplo. Dessa forma, o teorema constitui um importante instrumento de investigação para alunos do Ensino Médio.

A análise conjunta dos três teoremas, em alguns casos, pode contribuir para determinar a quantidade exata de raízes reais e, conseqüentemente, inferir a quantidade de raízes complexas não reais. Isso ocorre porque segundo o Teorema Fundamental da Álgebra, todo polinômio de grau n , com coeficientes complexos, possui exatamente n raízes complexas, contando-se as multiplicidades. Assim, para um polinômio com coeficientes reais, uma vez conhecida a quantidade exata de raízes reais, contando-se suas multiplicidades, é possível determinar, por diferença, a quantidade de raízes complexas não reais.

Do ponto de vista didático, o uso desses teoremas, associado a ferramentas computacionais, como Python e GeoGebra, pode contribuir significativamente para a compreensão e a aprendizagem desses conteúdos, constituindo um recurso relevante tanto para alunos quanto para professores.

8. REFERÊNCIAS

NASCIMENTO, C. K. A. *Polinômios, equações algébricas e o estudo de suas raízes reais*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

MATEMATICA.PT. **Teorema de Bolzano**. Matematica.pt, 2026. Disponível em: matematica.pt. Acesso em: 20 julho de 2026.

SILVA, A. C.; SANTOS, M. R.; BARBOSA, T. S. O estudo de equações polinomiais: uma experiência de ensino. *Brazilian Journal of Development*, Curitiba, v. 8, n. 10, p. 68120-68135, out. 2022.